

Prof. Dr. Marianne Nolte

# Mathematikdidaktik –

---

Zum Lehren und Lernen von  
Mathematik am Beispiel des  
Mathematikunterrichts in der  
Grundschule

# Mathematik

---

## Ballonfahrt

Drei Männer sitzen in einem Heißluftballon. Nach einiger Zeit stellen sie fest, daß sie sich verirrt haben. Einer lehnt sich über den Rand des Korbes und schreit: "Hallo! Wo sind wir?" Nach einer viertel Stunde kommt eine Antwort "Im Korb eines Ballons!". Daraufhin meint einer der Männer "Dies war mit Sicherheit ein Mathematiker!" Verwundert fragen die anderen "Woher willst Du das wissen?". Daraufhin antwortet der erste: "Aus drei Gründen. Erstens hat er lange gebraucht, zweitens war seine Antwort absolut richtig und drittens absolut wertlos."

<http://www.klassenarbeiten.net/lehrer/schulwitze.shtml>

---

# Mathematikdidaktik

---

- Eine wichtige Aufgabe der Mathematikdidaktik ist es, zu untersuchen, wie mathematisches Lernen gut gelingen kann.

# Mathematikdidaktik

---

- ... ist die Wissenschaft vom Lehren und Lernen von Mathematik.
- Sie orientiert sich einerseits an der Mathematik und andererseits am Lernenden.

# Bezugswissenschaften

- Mathematik
  - Um welche Inhalte geht es?
- Psychologie
  - Wie entwickeln sich mathematische Begriffe?
- Erziehungswissenschaft
  - Wie organisiere ich einen Lernprozess?
- Neurowissenschaft
  - Was passiert in unserem Gehirn beim Rechnen?

# Bezugswissenschaften

---

- Geschichte
  - Wie wurden die Zahlen geschrieben?
- Gesellschaftswissenschaften
  - Welche Inhalte sollen heute gelernt werden?
- Philosophie
  - Worin besteht die Natur mathematischer Begriffe?

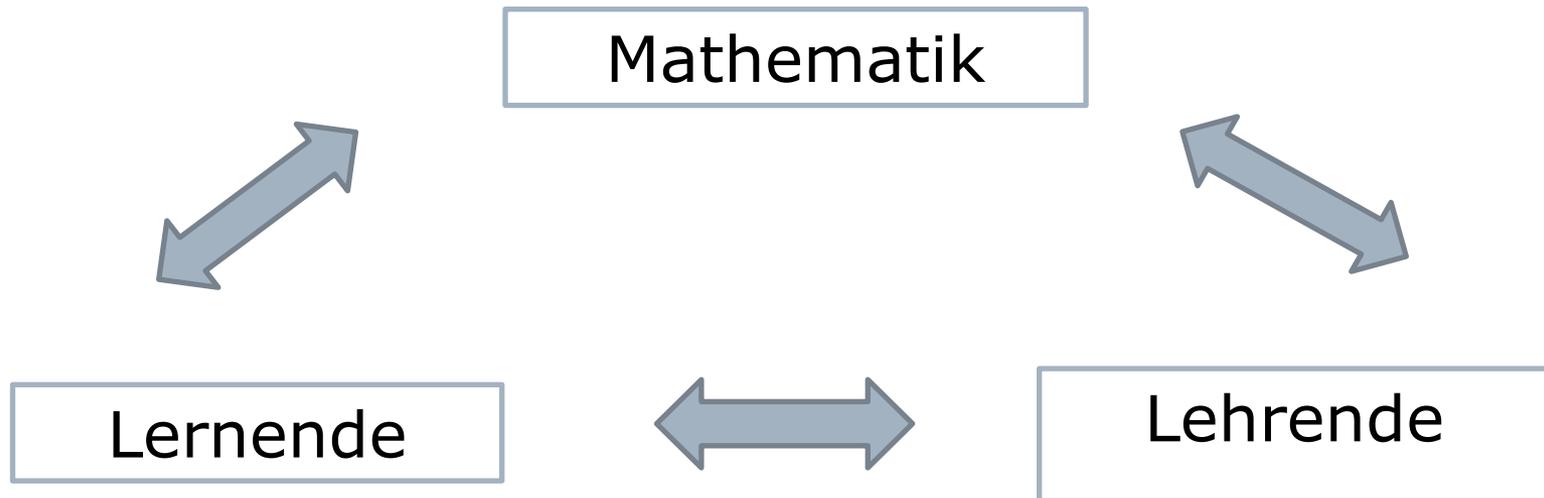
# Mathematikdidaktik

---

- „Mathematikdidaktik ist die Wissenschaft vom Lernen und Lehren von Mathematik in jeglicher Form, von den Beziehungen zwischen Mensch und Mathematik. Sie ist eine eigenständige interdisziplinäre Wissenschaft zwischen der Mathematik auf der einen Seite und der Erziehungswissenschaft, der Psychologie, Soziologie und Philosophie u.a. auf der anderen Seite“. (Bigalke 1984 S. 12).

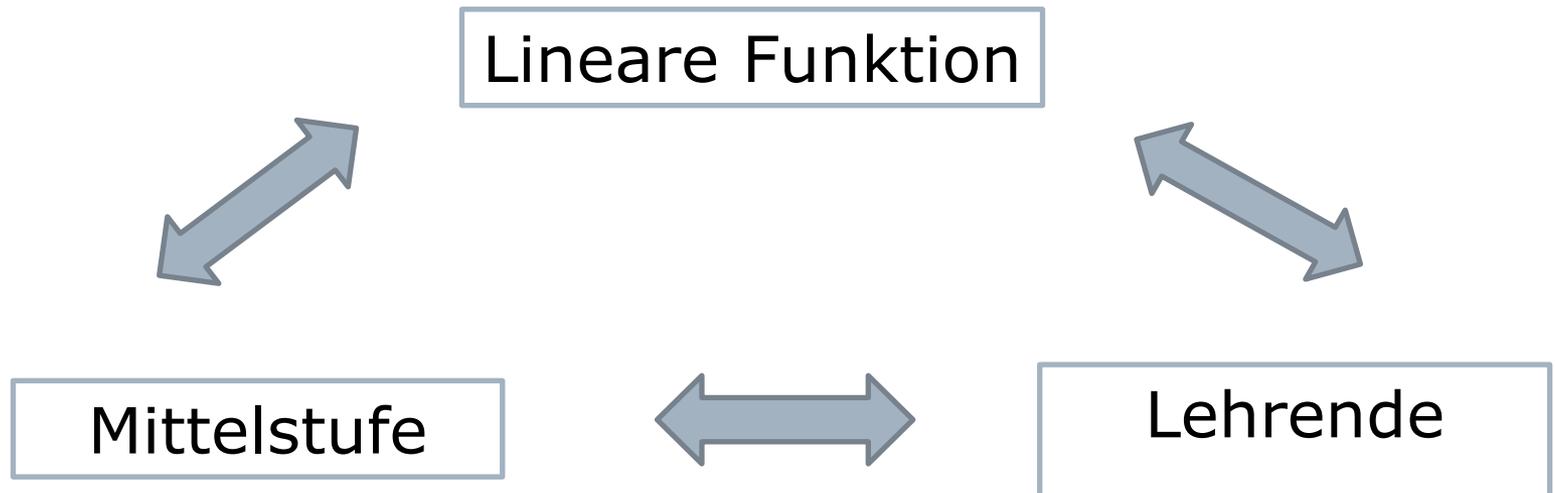
# Kindorientierung versus Fachorientierung

---



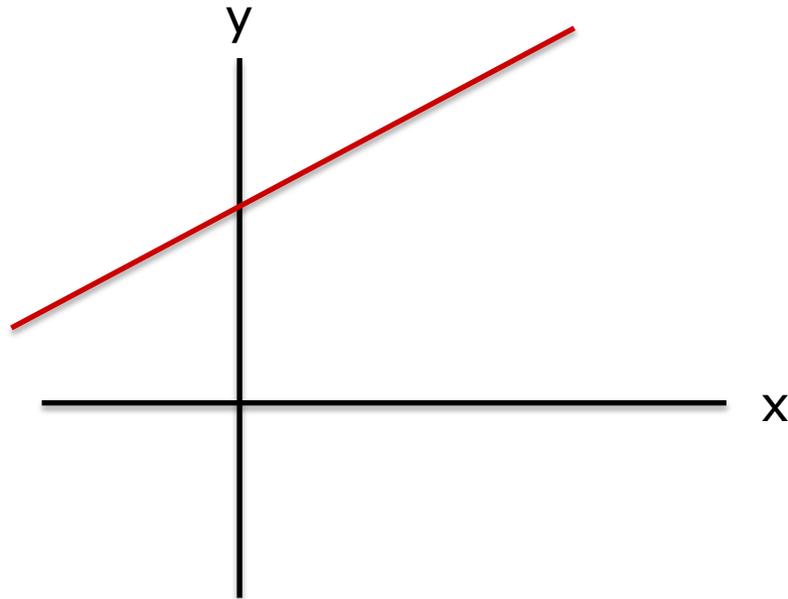
# Lineare Funktion

---



$$y = ax + b$$

---



# Vorkenntnisse

Was ist ein  
Koordinatensystem?  
Variablen?

Lineare Funktion

Was  
beeinflusst  
Lernen in  
dieser  
Altersstufe?

Mittelstufe

Welche  
Vorkenntnisse  
werden  
benötigt?

Lehrende

# Variable oder Unbekannte?

---

$3 + x = 7$

$x = 4$

Unbekannte  
bedeutet eine  
Reduktion des  
mathematischen  
Inhalts

Unbekannte/Variable

a, b, c?

Unbekannte  
ist leichter zu  
verstehen

Lernende

Lehrende

# Platzhalter

$$\square 3 + \square = 7$$

$$\square 3 + \square < 7$$

$$\square 3 + \square < 2$$

$\square$  Basis für den späteren Einsatz einer Gleichung wie  $y = ax + b$

# Spiralcurriculum

---

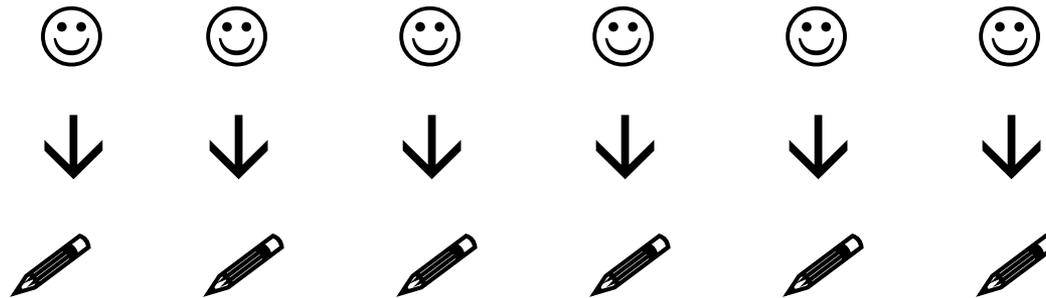
- Ein Begriff wird immer wieder aufgegriffen, immer wieder auf einem anderen Niveau und dem Alter entsprechend umfassender und komplexer

# Funktion

---

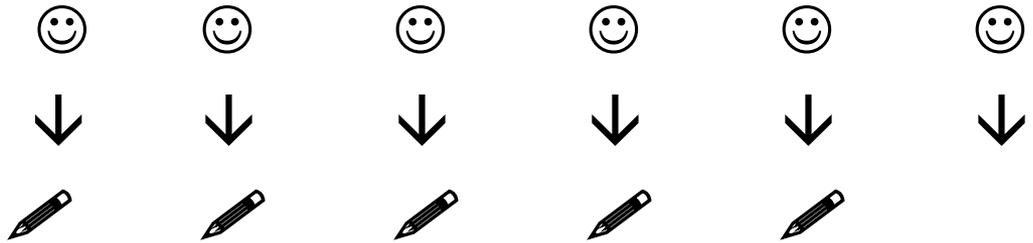
- Bei einer Geradenfunktion wird jedem Punkt auf der  $x$ -Achse ein Punkt auf der  $y$ -Achse zugeordnet.

# Abbildung

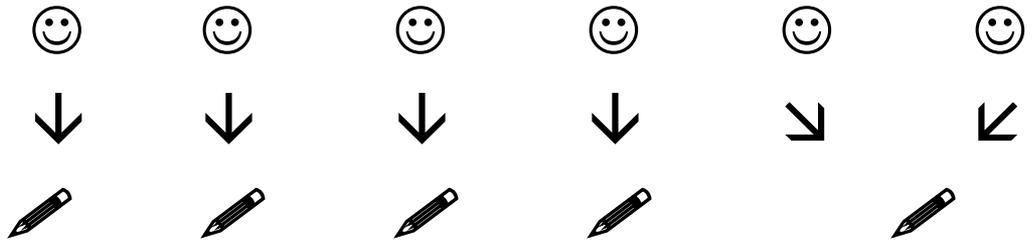


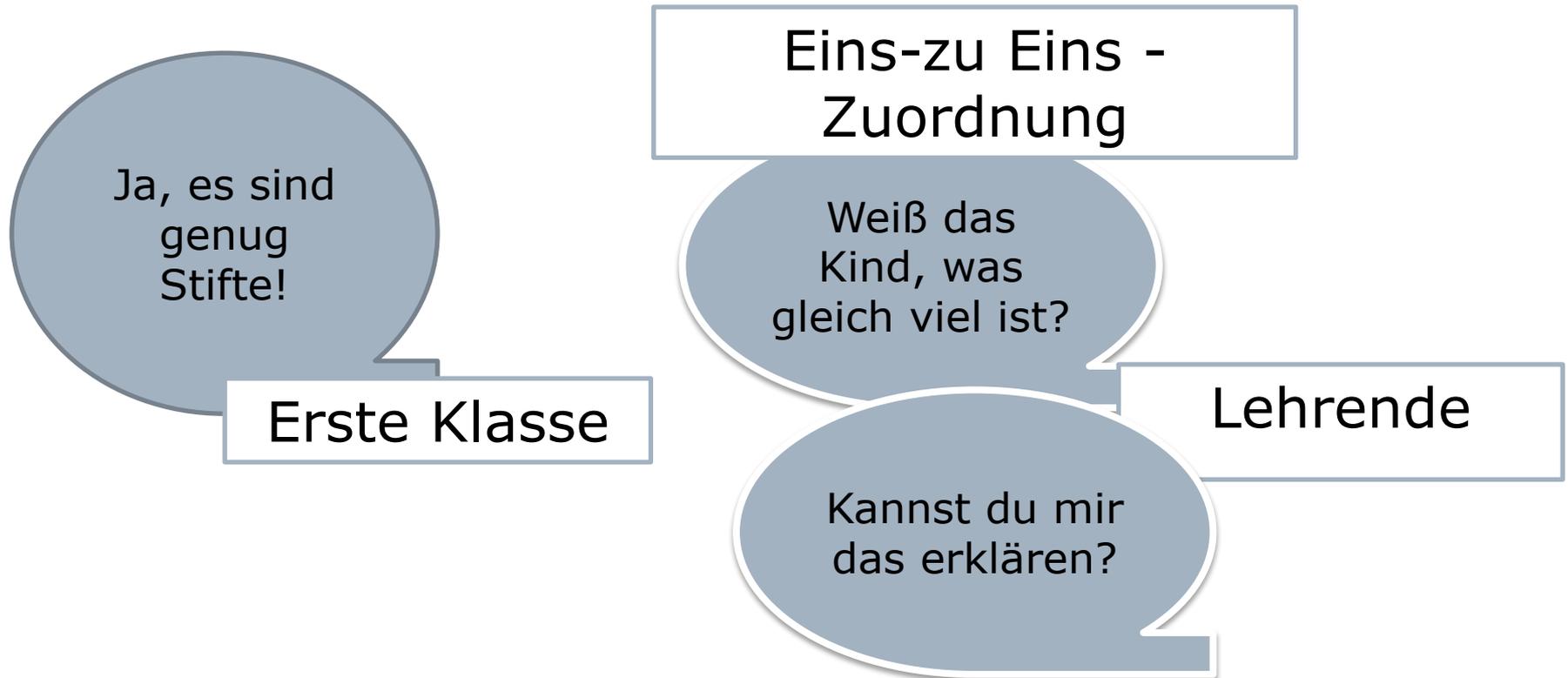
Hat jedes Kind einen Stift?

Ja!



Hat jedes Kind einen Stift?  
Ja, wir teilen uns einen!





# Verständnis erzeugen – Verständnis entwickeln

---

$$2 < 4$$

Was ist damit gemeint?

# Was ist mehr?



<http://www.kostenlos-fotos.de/fotos/displayimage.php?album=ran-dom&cat=98&pos=-2393>

Prof. Dr. Marianne Nolte

# Was ist mehr – drei Käfer oder zwei Elefanten? (Krajewski 2007)

---

- „Für den Säugling sind es die zwei Elefanten, weil er nicht die Anzahl, sondern die Ausdehnung bzw. das Volumen der beiden Mengen vergleicht.
- Für Kindergartenkinder sind es gewöhnlich die drei Käfer, weil sie den Begriff „mehr“ schon mit längerem Zählen müssen in Verbindung bringen.“ (Krajewski 2007)

S. C. Levine, L. Whealton Suriyakham,  
M. L. Rowe,  
J. Huttenlocher, E. A. Gunderson 2010

---

- Gespräche mit Kindern wie: „Wie viele Arme hat der Tintenfisch?“, gemeinsames Betrachten von Bilderbüchern, verwenden von Zahlen im Alltag ... führen zu einem signifikanten Anstieg der Zahl – Menge Zuordnung bei knapp vierjährigen Kindern.



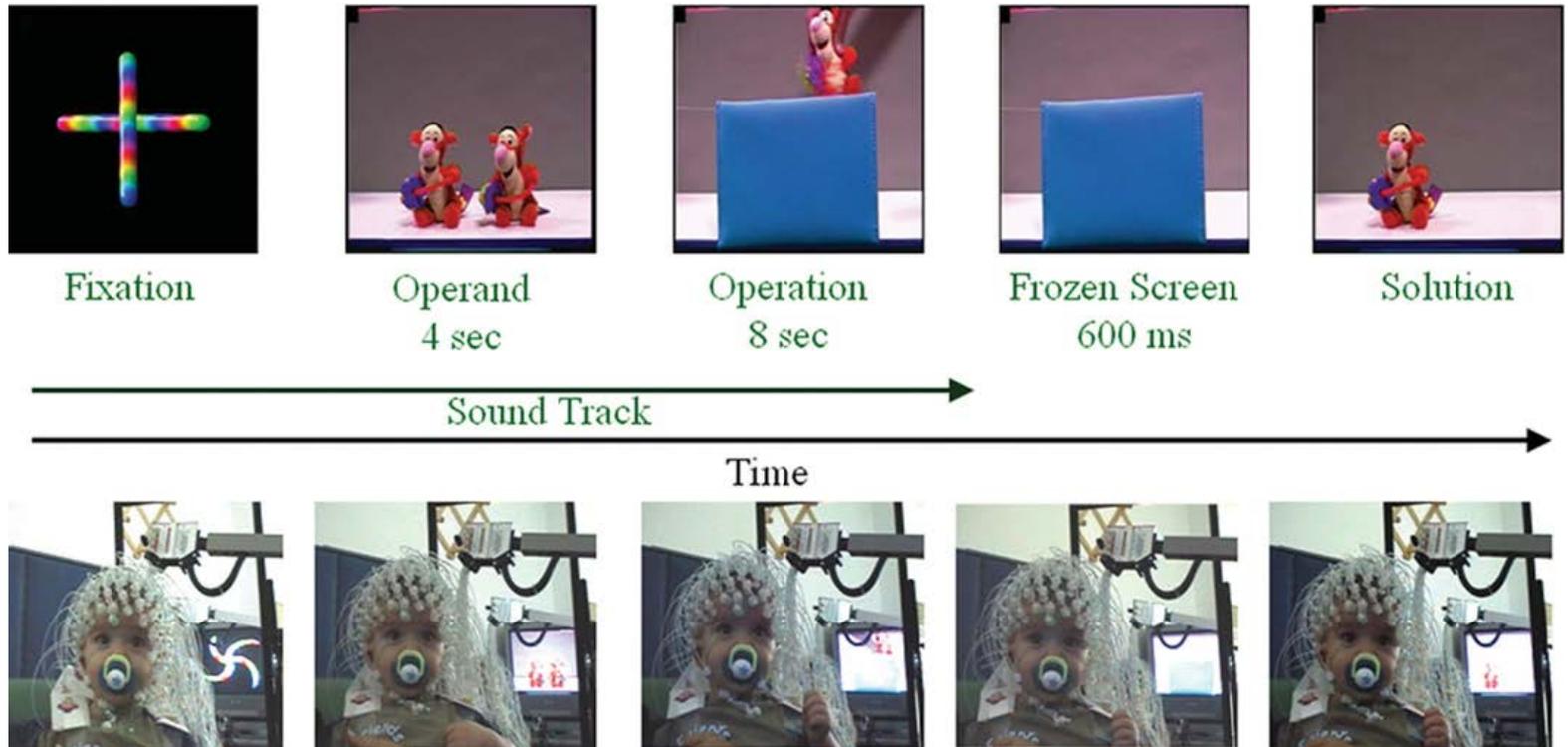
Universität Hamburg

DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

# Zur Entwicklung mathematischen Wissens

---

# Können Babys rechnen?



(aus Berger, Tzur et al. 2006, S. 12650)

# Zahlbegriff

---

- Der Zahlbegriff ist ein zentraler Inhalt der Mathematik, auf den spätere Inhalte aufbauen.



# Nicht alle sind gleich

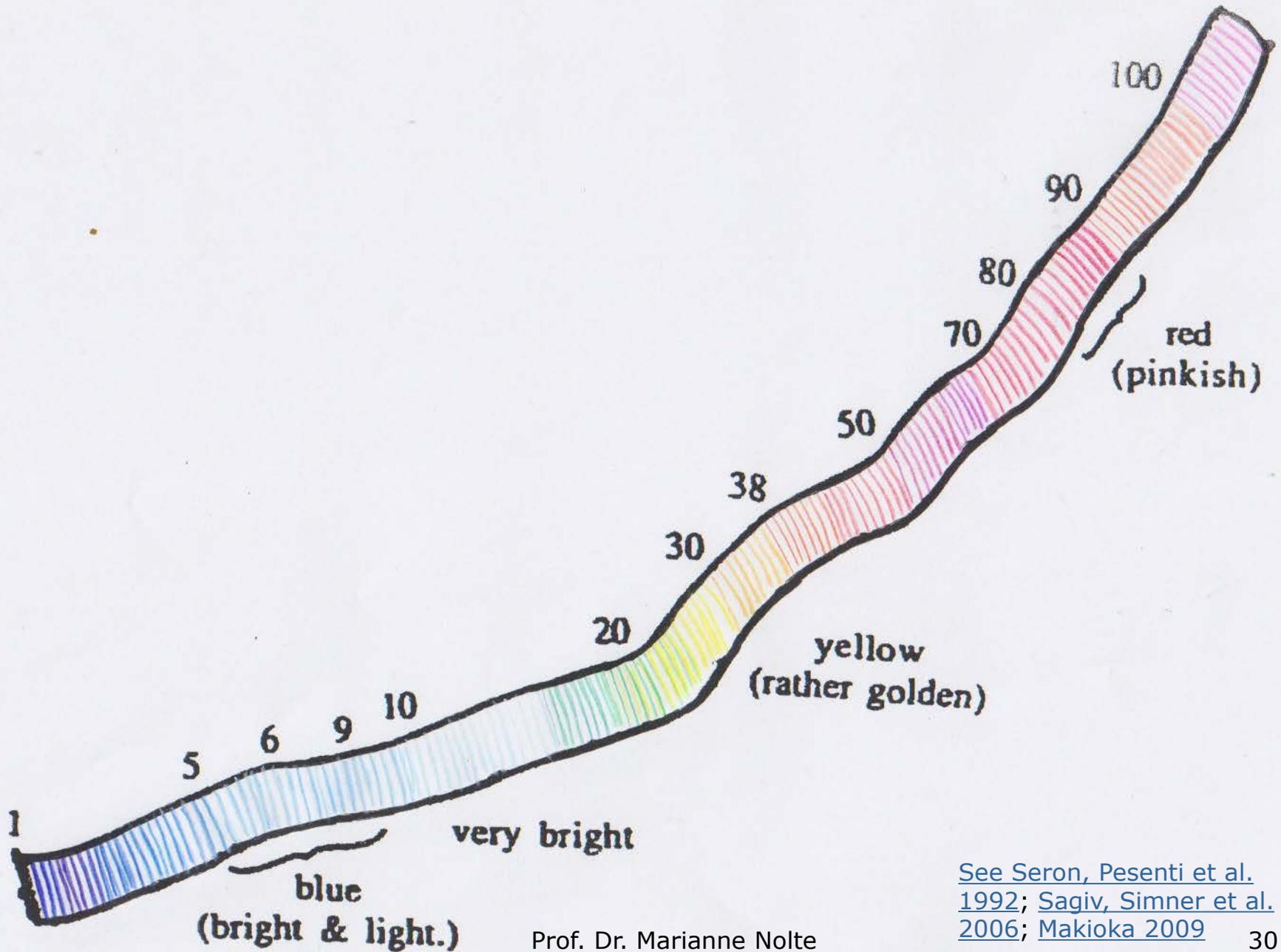
---

- Synästhesie
- Rechenstörungen
- Mathematische Hochbegabung

# Synästhesie

---

- Zahlen farbig sehen
- Zahlen in spezifischer Anordnung sehen
- <http://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/0,1518,670045,00.html>
- <http://www.synaesthesia.org/1news/Aktuelles>



Prof. Dr. Marianne Nolte

See Seron, Pesenti et al. 1992; Sagiv, Simner et al. 2006; Makioka 2009

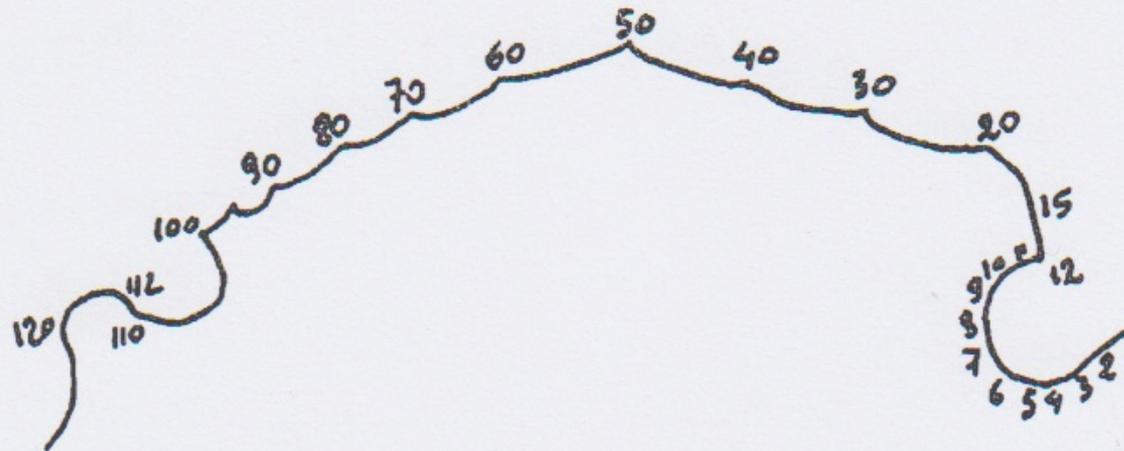
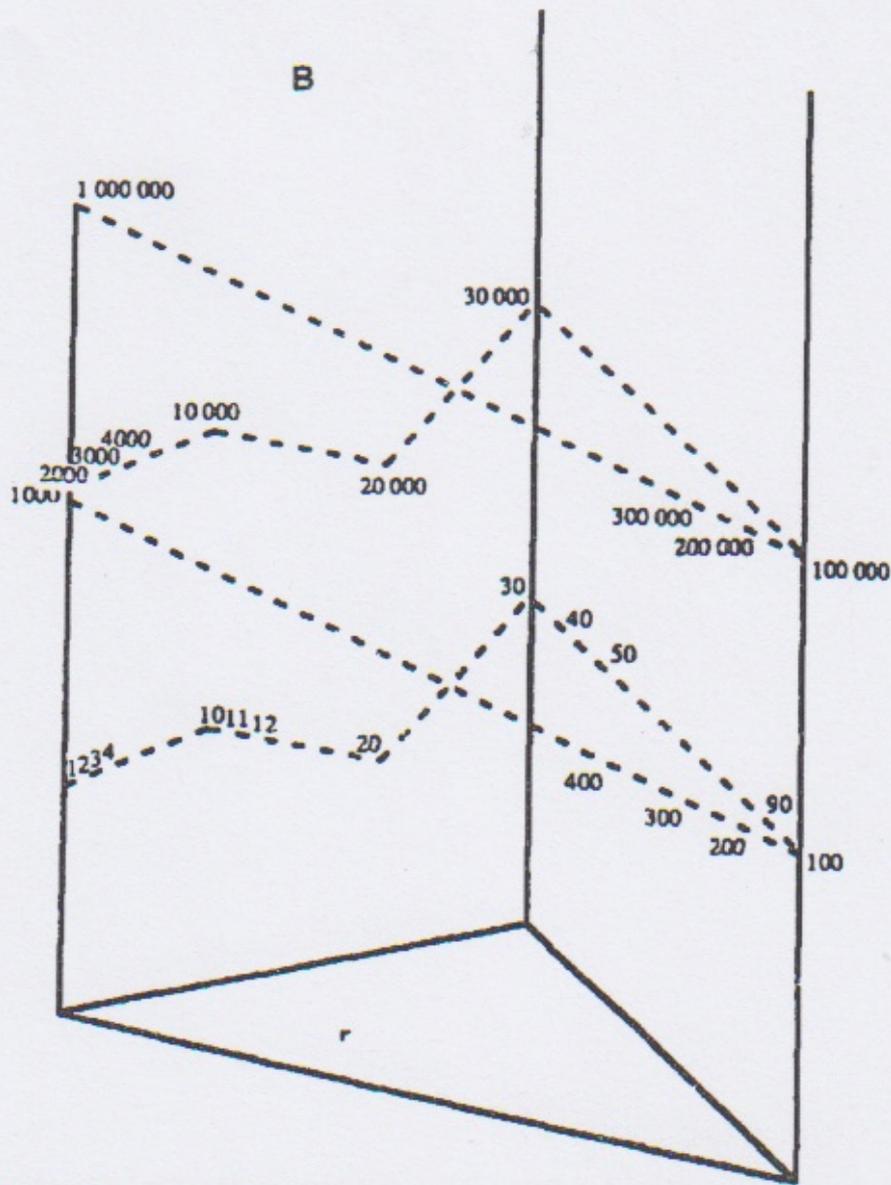


Figure 1. *Number-form with a clock-like form at the beginning (Galton, 1880a, reprinted by permission from Nature vol. 21, p. 253, Copyright © 1880 Macmillan Magazines Ltd.).*

[See Seron, Pesenti et al. 1992](#); [Sagiv, Simner et al. 2006](#); [Makioka 2009](#)



[See Seron, Pesenti et al. 1992; Sagiv, Simner et al. 2006; Makioka 2009](#)

Figure 2. *Number-form: (A) with change in luminosity and colours at some location (Galton, 1880a, reprinted by permission from Nature vol. 21, p. 254, Copyright © 1880 Macmillan Magazines Ltd.) and (B) occupying different planes (Bertillon, 1882, p. 267).*

# Subjektive Zahlauffassungen

---

- Käpnick (1997): Kinder entwickeln sehr unterschiedliche Beziehungen zu Zahlen
- haben Lieblingszahlen und Pechzahlen
- entwickeln unterschiedliche Vorstellungen zur Anordnung von Zahlen
  - Warum schreibst du die Zahlen so auf (durcheinander / scheinbar beliebig?)
  - Sie sollen so sein wie die Spielsachen im Kinderzimmer, nicht so wie Soldaten, streng hintereinander aufgereiht.

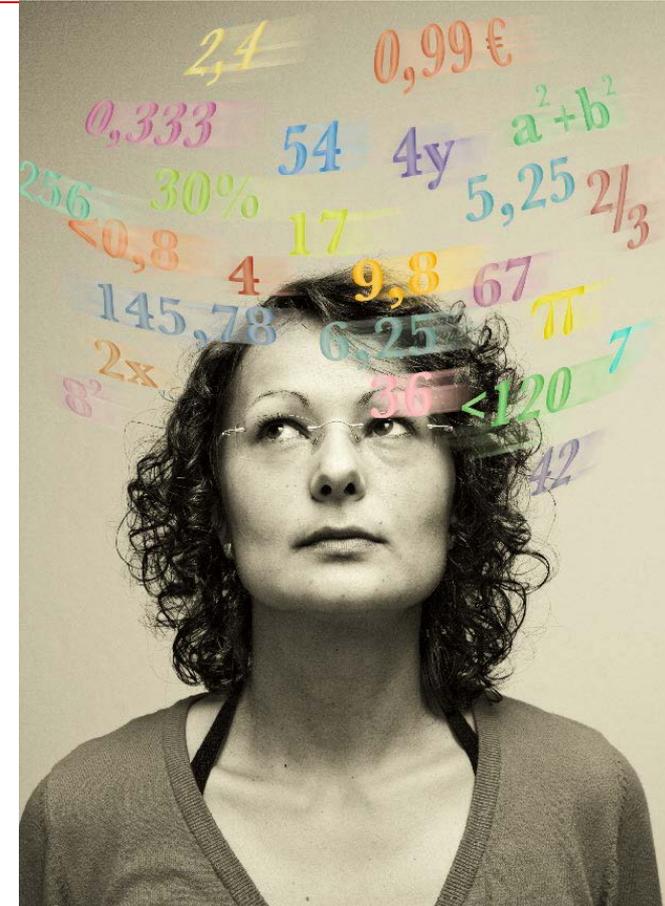
# Rechenstörungen

---

- Rechenstörung
- Rechenschwäche
- Dyskalkulie

# Samantha

"Ich bin 25 Jahre alt und ich kann Ihnen nicht sagen, wie spät es ist. Ich habe Probleme Telefonnummern zu wählen, Geld zu zählen, mit meinem Kontostand umzugehen, Trinkgeld zu geben, Richtungen zu finden, Entfernungen einzuschätzen und überhaupt einfaches mathematisches Wissen im Alltag anzuwenden." (nach Abeel, 2003, S. 1)



# Michael von Aster (2005): Wie kommen Zahlen in den Kopf?

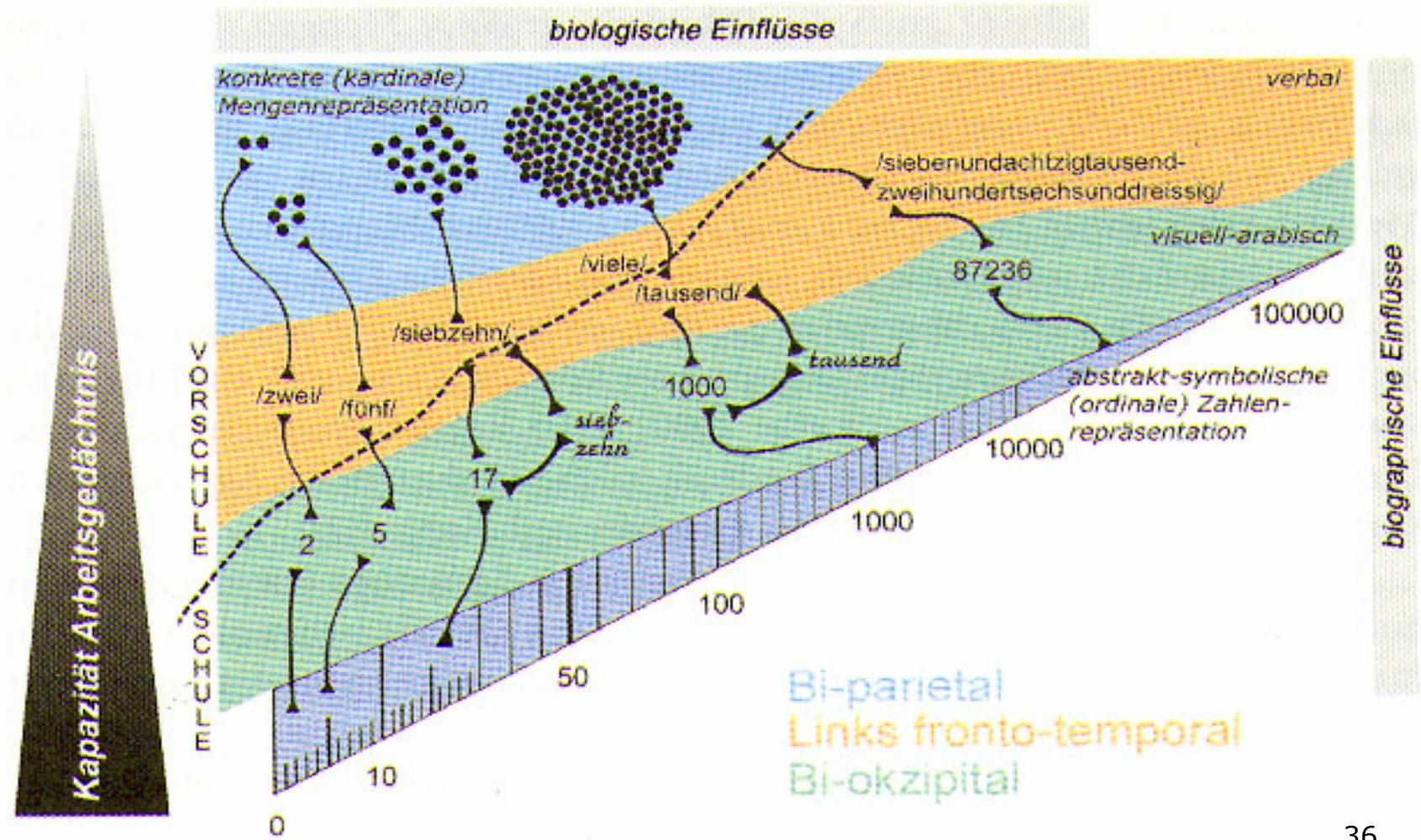


Abbildung 2: Entwicklung und Verknüpfung zahlenverarbeitender Hirnfunktionen

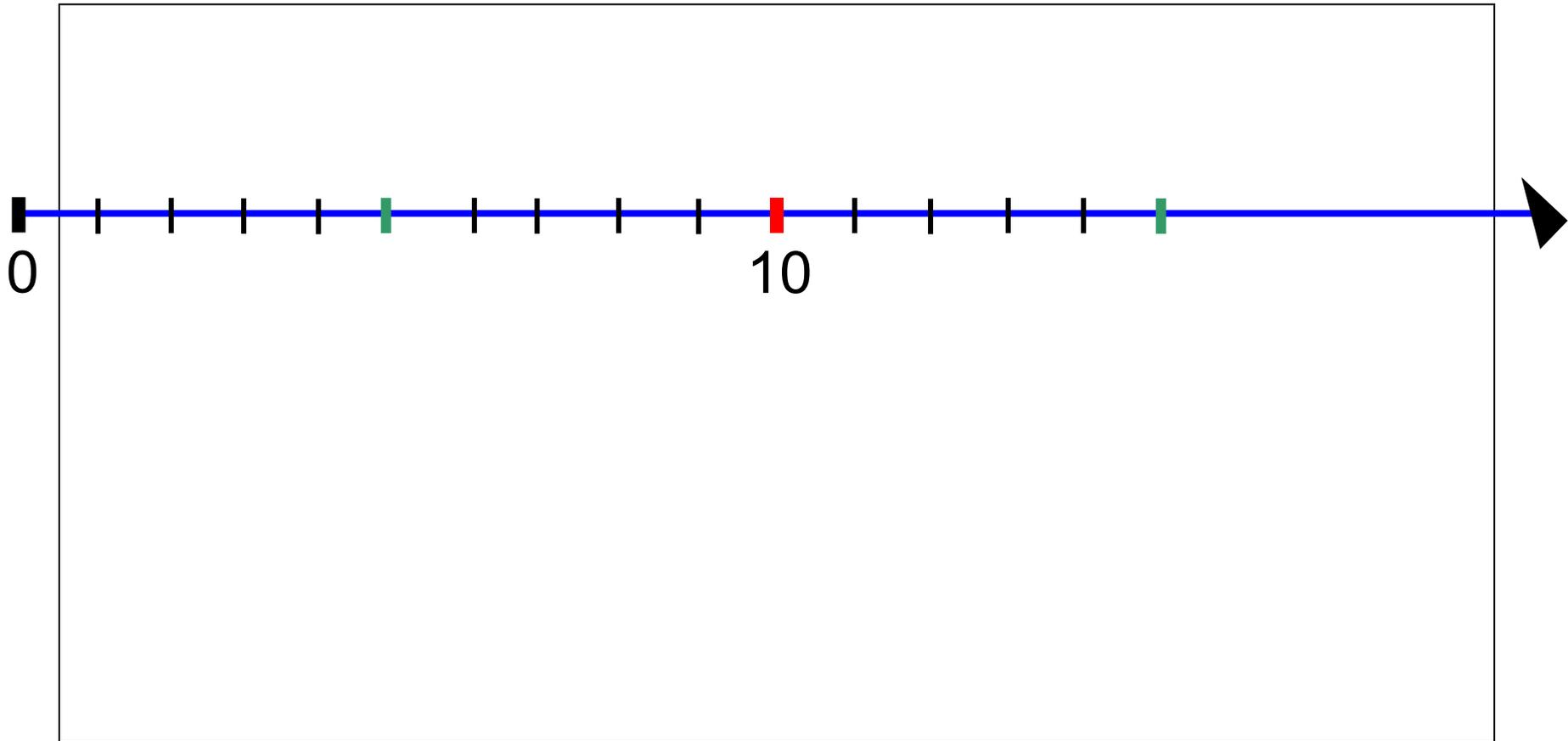


52 - 48



25 - 7

# Zahlenstrahl lesen lernen



# Zahlenstrahl

---

- Mit jeder Zahlenraumerweiterung kann sich die Länge des Zahlenstrahls nach rechts erhöhen.
- Wenn die negativen Zahlen eingeführt werden, wird er auch nach links erweitert, er wird zur Zahlengerade.
- Der Zahlenstrahl ist gerichtet. Von links nach rechts werden die Zahlen immer größer.

# Hundertertafel

- Zahlenstrahl: lineare Anordnung
- Hundertertafel: Quadrat
  - Zehnerbündelung
- Hinweis auf Strukturen:
  - $+1, +2, \dots$
  - $+10, +20, \dots$
  - Immer plus 9, welche Zahlen sind das?
  - Immer plus 12, welche Zahlen sind das?

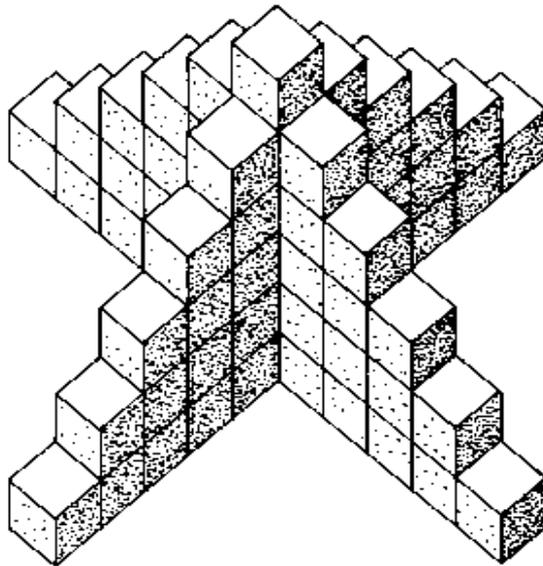
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

# Mathematische Hochbegabung

---

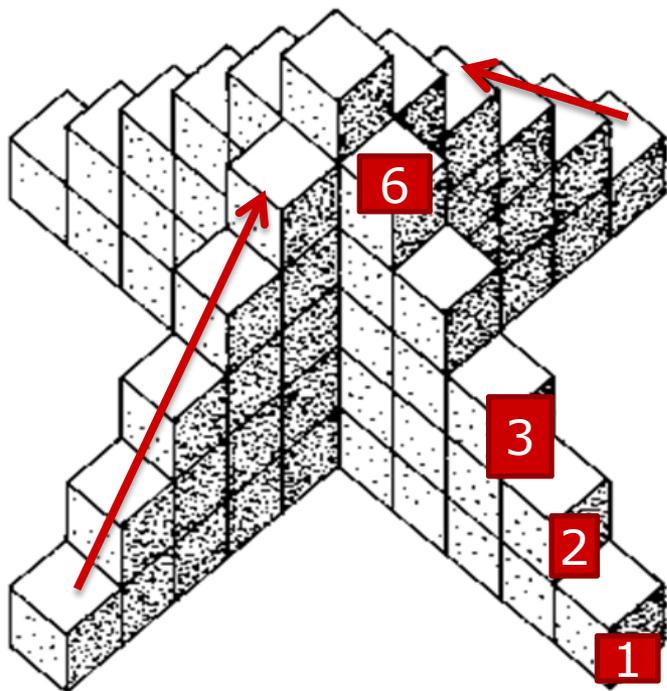
- Martin
- Marius
- PriMa: Kinder der Primarstufe auf eigenen Wegen zur Mathematik
- <http://blogs.epb.uni-hamburg.de/nolte/>

# Aufgabenbeispiel



- Wie viele Würfel braucht man für diesen Turm?
- Wie viele Würfel braucht man für einen solchen Turm, der 12 Würfel hoch ist?

Shell Centre for Mathematical Education (1984). Problems with Patterns and Numbers. Masters for Photocopying.(S. 5 / 18)



$4 \times (1+2+3+4+5) + 6$

$11 \times 6$

# Lösungswege

- Man zählt die Würfel in den einzelnen Wänden, multipliziert mit 4 und addiert die Anzahl der Würfel in der mittleren Säule.
  - $4 \times (1+2+3+4+5) + 6$
- Zwei Seiten des Turms können aufeinander gelegt werden. Wenn man diese nebeneinander stellt, erhält man einen Quader:
  - $11 \times 6$

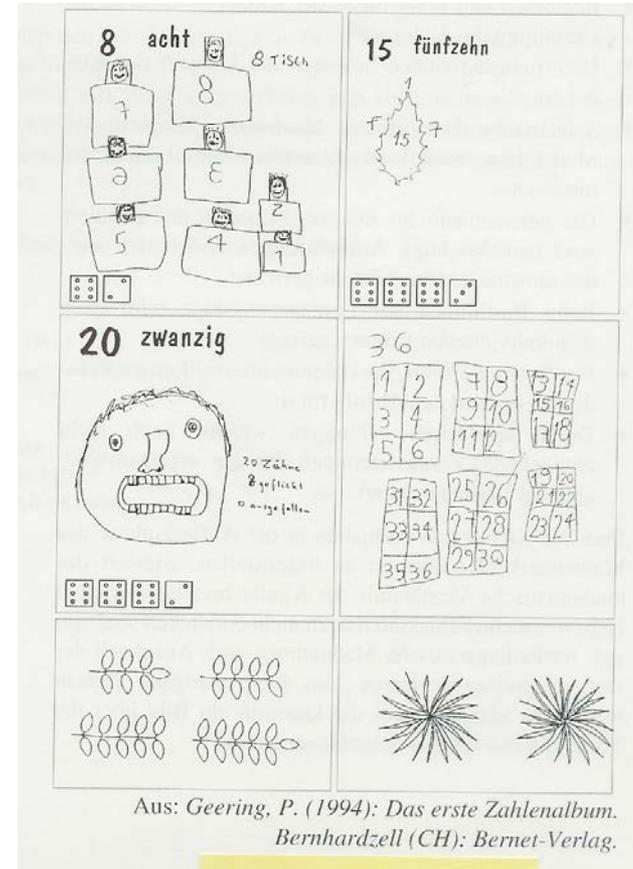
# Was ist mit all den anderen Kindern?

---

- Zahlen haben etwas mit mir zu tun:
  - Zahlendetektive
- Was ist Mathematik? (Sonja Küpper)

# Erfahrungen aufgreifen: Zahlendetektive, Ich-, Zahlenbuch,...

- Mein Ich-Buch
  - Geburtstag
  - Gewicht
  - Größe
- Zahlendetektive
  - Zahlen in meiner Umgebung
  - In der Schule
  - In der Familie
  - Auf dem Schulweg
- Mein Zahlenbuch
  - Lieblingszahlen
  - Was ich schon weiß
  - Was ich lernen möchte





Stell dir vor, dir begegnet ein Außerirdischer, der noch nie in einer Schule war. Du erzählst ihm, was du in der Schule alles erlebst und lernst, von den Pausen, deiner Klasse und den Unterrichtsfächern. Ganz erstaunt fragt dich der Außerirdische: „WAS IST DENN MATHEMATIK?“ Beantworte ihm die Frage möglichst ausführlich und zeichne ihm ein Bild. Die Stichworte an der Tafel können dir helfen.

In Mathe lerne ich das Rechnen zum Beispiel:  $1+1$ . Ich brauche Mathe zum Einkaufen. Es bringt Spaß, an manchen Aufgaben zu Knobeln. In Mathe mag ich besonders gerne Zahlenmauern.

Unser Mathematikunterricht:



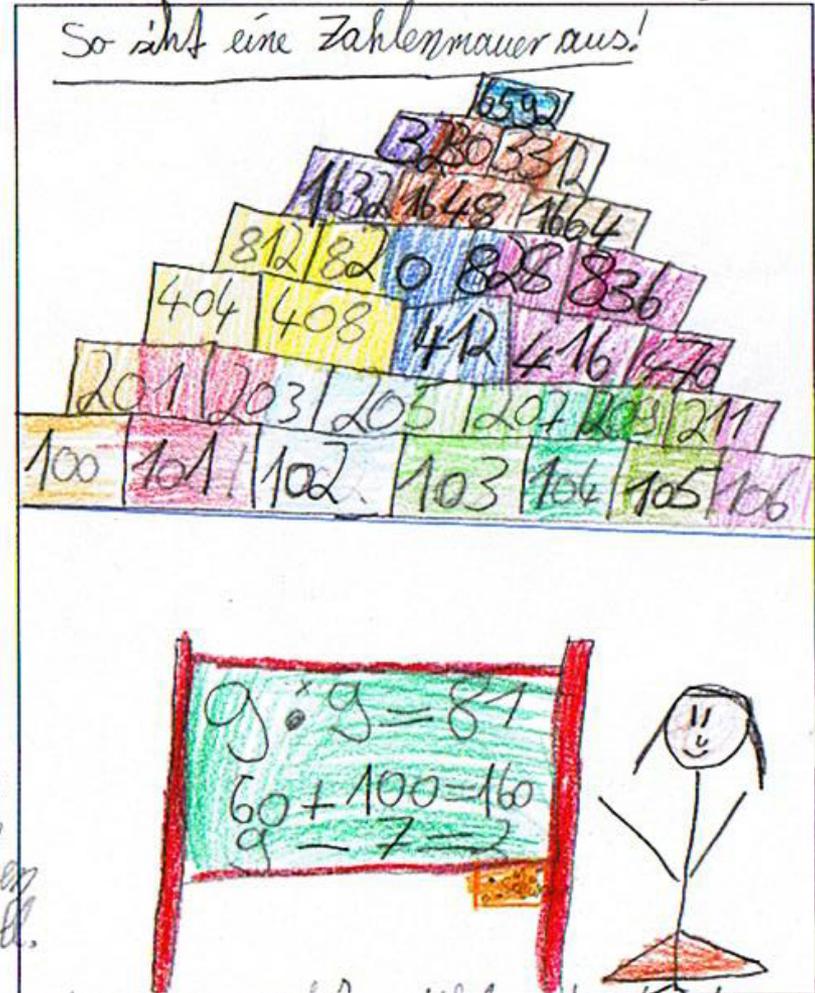


Stell dir vor, dir begegnet ein Außerirdischer, der noch nie in einer Schule war. Du erzählst ihm, was du in der Schule alles erlebst und lernst, von den Pausen, deiner Klasse und den Unterrichtsfächern. Ganz erstaunt fragt dich

der Außerirdische: „WAS IST DENN MATHEMATIK?“ Beantworte ihm die Frage möglichst ausführlich und zeichne ihm ein Bild. Die Stichworte an der Tafel können dir helfen.

In der Schule lernt man viel, und muss viel lernen.  
 Man hat verschiedene Sachen (Fächer) die man lernt.  
 Zum Beispiel Mathematik (Mathe) oder Deutsch.  
 Mathe ist nämlich, wenn man viele Zahlen  
 zusammen auf und <sup>Plus</sup> + oder <sup>Minus</sup> - rechnet, z.B.  
 Die leichteste Aufgabe  $1+1$ . Du weißt sicher  
 die Zahlen bis 10 oder 100. Du rechnest es  
 einfach aus, weil  $1+1=2$  ist. So ergeben  
 sich immer neue Zahlen. Ich finde Mathe toll.  
 Im Moment rechnen wir mit Zahlenmauern, und wie das geht erzähle ich dir morgen.

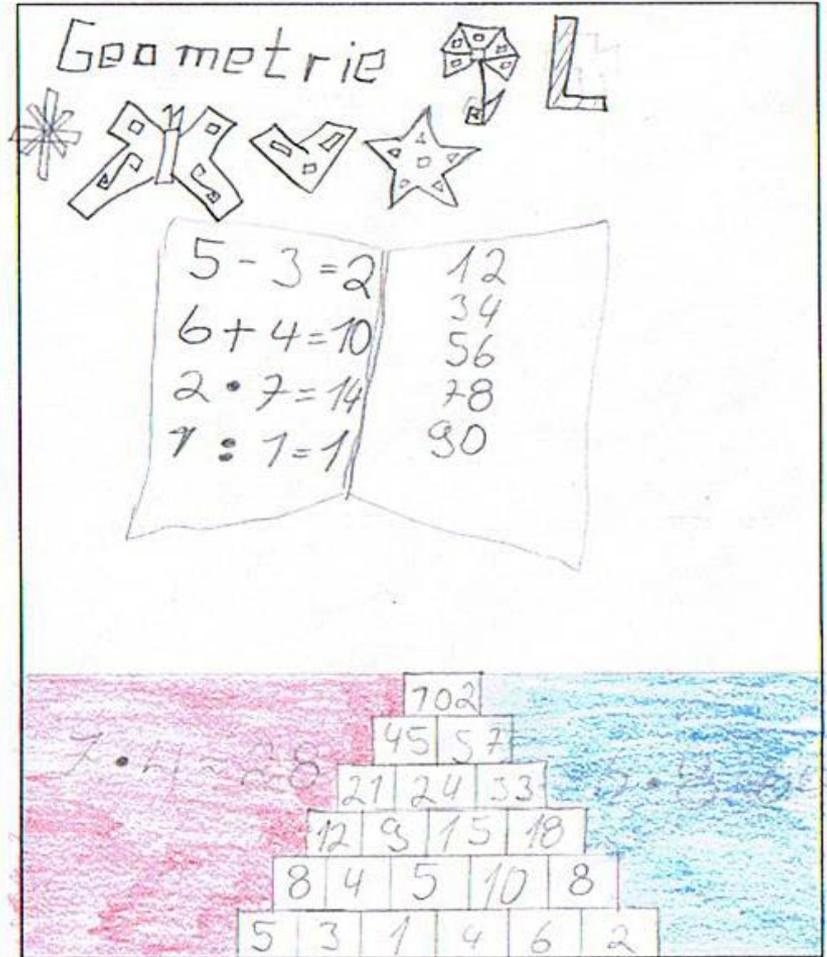
Unser Mathematikunterricht:



In Mathe muss man Rechnen, z. B. du hast 3 Rosen, und 2 Rosen. Dann muss du die 2 Rosen zu den 3 Rosen dazu tun. Jetzt hast du 5 Rosen. Das nennt man **Plus** rechnen. Dieses Zeichen sieht so aus +. Mathe ist manchmal toll, manchmal aber auch langweilig. Mathe braucht man für das ganze Leben.

In Mathe lernt man, dass man in seinem Leben schluss sein kann.

Unser Mathematikunterricht:





Und ich finde nichts  
doof. Sparrend ist alles  
und nichts langweilig  
wir haben in diesem  
Schuljahr + - • :  $\frac{1}{16}$   $\frac{70}{100}$   $\frac{1}{3}$   $\frac{1}{6}$   
gerechnet.

# Natürliche Differenzierung

---

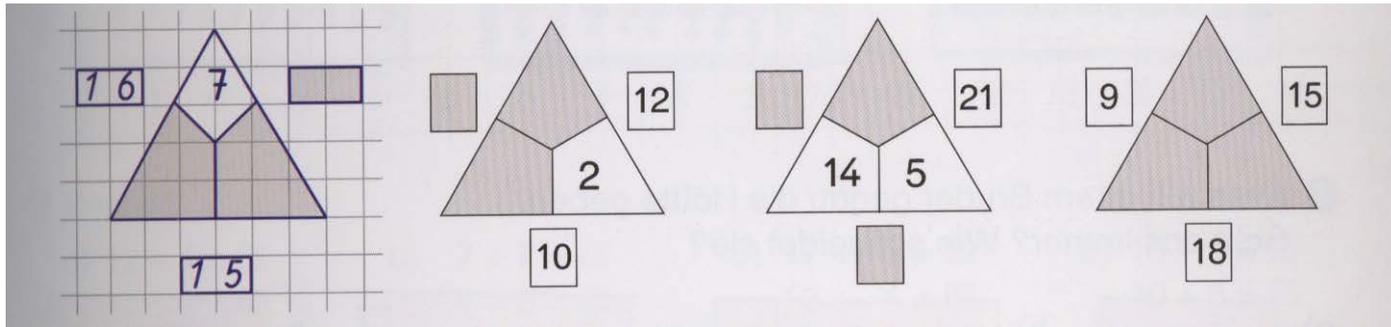
- Prof. Dr. Günter Krauthausen
- [http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material aus SGS/Handreichung Krauthausen-Scherer.pdf](http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material%20aus%20SGS/Handreichung%20Krauthausen-Scherer.pdf)

# Lösen durch Handeln

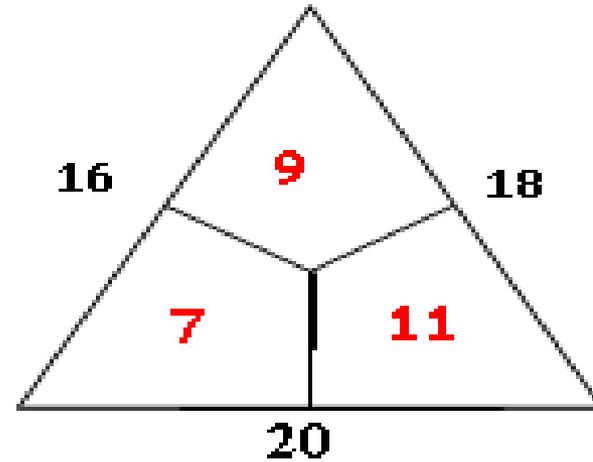
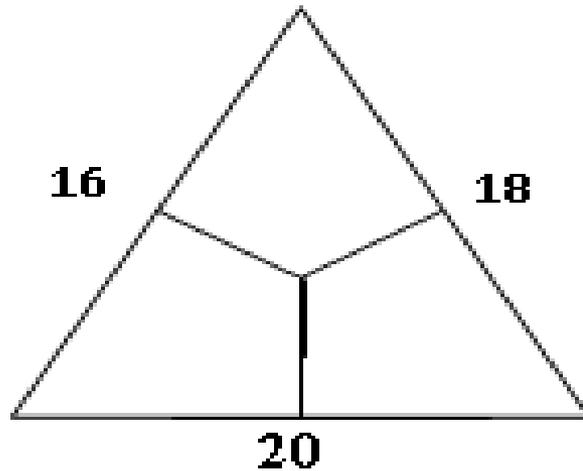


① Wie rechnen die Kinder?  
 Erkläre.

# Verschiedene Denkprozesse



# Unterschiedliche Schwierigkeitsgrade



Schmidt 2010

# Mathematik lernen

---

- Kinder sollen sich Mathematik zu eigen machen.
- Sie sollen mit Freude aktiv mathematisch tätig sein.

# Aktiv entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht (Wittmann/Müller)

---

- Schwierigkeiten werden nicht isoliert.
- Wege werden nicht vorgegeben.
- Hinführen
  - zur Selbsttätigkeit der Kinder
  - zur Mustererkennung
  - zum Entdecken von Zusammenhängen
- Natürliche Differenzierung  
(Krauthausen)

# Lernumgebungen zur Zahlraumerweiterung bis 1000 (3. Schuljahr)

H	Z	E

21	<table border="1"> <thead> <tr> <th>H</th> <th>Z</th> <th>E</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td> </td> <td>○ ○</td> <td>○</td> </tr> </tbody> </table>	H	Z	E		○ ○	○
H	Z	E					
	○ ○	○					
120	<table border="1"> <tbody> <tr> <td>○</td> <td>○ ○</td> <td> </td> </tr> </tbody> </table>	○	○ ○				
○	○ ○						

- c. Dividiere die gefundenen Zahlen durch 9: Was fällt auf?
- d. Was geschieht, wenn du noch den Stellenwert für Tausender dazu nimmst?
- a) Lege mit *drei* Plättchen Zahlen an der Stellentafel. Du musst immer alle drei Plättchen legen. Ordne die gefundenen Zahlen nach der Größe. Wie viele verschiedene Zahlen kannst du finden?
- b. Versuche jetzt dasselbe mit immer *zwei* Plättchen, mit *einem* Plättchen, mit *fünf, sechs, ... acht* Plättchen. Wie viele Zahlen kannst du jeweils bilden?

# Lernumgebungen

---

- „Mit den Lernumgebungen stellen wir zu wichtigen Themen der Primarschulmathematik Aufgaben bereit, die für alle Kinder – von rechenschwachen bis zu den hochbegabten – Forderungen bereithalten. Nach sorgfältiger Einführung bestimmen die Kinder selbst Niveau und Schwierigkeitsgrad der Bearbeitung. Im Projekt „mathe 2000“ wird dies als natürliche Differenzierung bezeichnet.“

Hengartner, Hirt, Wälti [www.mathe-projekt.ch/beschrieb.htm](http://www.mathe-projekt.ch/beschrieb.htm)



Danke für Ihre Aufmerksamkeit!

# Literatur

- Abeel, S. (2007). My Thirteenth Winter. A Memoir. New York, Scholastic Inc.
- Aster, M. v. (2005). Wie kommen die Zahlen in den Kopf? Ein Modell der normalen und abweichenden Entwicklung zahlenverarbeitender Hirnfunktionen. Rechenstörungen bei Kindern. Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik M. v. Aster and J. H. Lorenz. Göttingen, Vandenhoeck&Ruprecht: 13-33.
- Berger, A., G. Tzur, et al. (2006). "Infant brains detect arithmetic errors " Proceedings of the National Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America **103(33)**.
- Bigalke, H.-G. (1984). Thesen zur Theoriediskussion in der Mathematikdidaktik. Beiträge zum Mathematikunterricht 1984, Vorträge auf der 18. Bundestagung für Didaktik der Mathematik in Oldenburg. Bad Salzdetfurth, franzbecker-didaktischer Dienst.
- Dehaene, S. (1992). "Varieties of numerical abilities." Cognition **44**: 1- 42.
- Dehaene, S. (1999). Der Zahlensinn oder warum wir rechnen können. Basel, Boston, Berlin, Birkhäuser.
- Feigenson, L., S. Dehaene, et al. (2004). "Core systems of number." Trends in Cognitive Sciences **8(7)**: 307-314.
- Käpnick, F. (1997). ""Meine Lieblingszahl", Anregungen zu einem Projekt über subjektive Zahlauffassungen." Grundschulunterricht **1**: 22-24.

# Literatur

- ❑ Krajewski, K. (2007). Prävention von Rechenschwierigkeiten durch gezielte Förderung im Kindergarten. Konzeptpapier von Dr. Kristin Krajewski zum Vortrag auf der Tagung „Bildung von Anfang an“. in Offenbach am Main, 5.2.2007: [www.bildung-von-anfang-an.de/ .../offenbach\\_krajewski.pdf](http://www.bildung-von-anfang-an.de/.../offenbach_krajewski.pdf)
- ❑ Levine, S. C., L. W. Suriyakham, et al. (2010). "What Counts in the Development of Young Children's Number Knowledge?" *Developmental Psychology* **46**(5): 1309-1319.
- ❑ Makioka, S. (2009). "A self-organizing learning account of number-form synaesthesia." *Cognition* **112**: 397-414.
- ❑ Sagiv, N., J. Simner, et al. (2006). "What is the relationship between synaesthesia and visuo-spatial number forms?" *Cognition* **101**: 114-128.
- ❑ Schmidt, S. (2010). Rechendreiecke und Rechenvierecke – Eine Fallstudie aus dem Grundschulbereich im Horizont von Reifung für das Umgehen mit Komplexität –. Was macht Mathematik aus? Nachhaltige paradigmatische Ansätze für die Förderung mathematisch besonders begabter Schülerinnen und Schüler. Festschrift aus Anlass des 80. Geburtstages von Prof. Dr. Karl Kießwetter. Schriften zur mathematischen Begabungsforschung Band 1. M. Nolte. Münster, WTM Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.
- ❑ Seron, X., M. Pesenti, et al. (1992). "Images of numbers. Or "When 98 is upper left and 6 sky blue"." *Cognition* **44**: 159-196.
- ❑ Wynn, K. (1992). "Children's acquisition of the number words and the counting system." *Cognitive Psychology* **24**: 220-251.
- ❑ Wynn, K. (1995). "Origins of Numerical Numeracy." *Mathematical Cognition* **1**.